

Список ключевых определений, утверждений и фактов курса планиметрии 9 физико-математического класса.

Учитель математики — Друца Алексей Валерьевич

1 Обозначения. Первичные понятия.

2 Углы. Отрезки. Многоугольники.

Определение 2.1 Многоугольник называется **правильным**, если все его стороны равны друг другу и все его углы равны друг другу.

Замечание 2.1 Чтобы это условие выполнялось для треугольника достаточно, чтобы либо хотя бы все стороны были равны между собой, либо хотя бы все углы были равны между собой (следует из свойства и признака равнобедренного треугольника). Но для правильности многоугольников, содержащих четыре вершины и больше, не достаточно равенства только всех сторон или только всех углов (примерами могут служить прямоугольник и ромб).

3 Равнобедренный треугольник. Равенство треугольников.

4 Параллельность прямых.

Теорема 4.1 (о сумме углов треугольника) Сумма внутренних углов любого треугольника равна 180° , или π в радианах.

Следствие 4.1 В треугольнике ABC внешний угол при вершине A равен сумме внутренних углов при вершинах B и C .

Теорема 4.2 (о сумме внутренних углов выпуклого многоугольника) Сумма внутренних углов выпуклого многоугольника, имеющего n вершин, равна $(n - 2)180^\circ$, или $(n - 2)\pi$ в радианах.

Замечание 4.1 Последняя теорема верна и для невыпуклого многоугольника. Однако для таких многоугольников доказательство теоремы более сложное, чем для выпуклых.

Теорема 4.3 (о сумме внешних углов многоугольника) Сумма внешних углов многоугольника, имеющего n вершин, (если в сумме учитывать только один угол при каждой вершине) равна 360° , или 2π в радианах.

5 Четырехугольники.

6 Подобие треугольников. Теоремы Менелая и Чебы.

Теорема 6.1 (Менелая I) Пусть дан треугольник ABC , а на каждой прямой, содержащей его стороны, заданы точки $A_1 \in (BC)$, $B_1 \in (AC)$ и $C_1 \in (AB)$, причем одна из них лежит на продолжении стороны, две другие — на сторонах. Точки A_1 , B_1 и C_1 лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда выполняется следующее соотношение (называемое **тройным соотношением**):

$$\frac{|AB_1|}{|B_1C|} \cdot \frac{|CA_1|}{|A_1B|} \cdot \frac{|BC_1|}{|C_1A|} = 1. \quad (6.1)$$

Теорема 6.2 (Менелая II) Пусть дан треугольник ABC , а на каждой прямой, содержащей его стороны, заданы точки $A_1 \in (BC)$, $B_1 \in (AC)$ и $C_1 \in (AB)$, причем все точки лежат на продолжениях сторон. Точки A_1 , B_1 и C_1 лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда выполняется следующее соотношение (называемое **тройным соотношением**):

$$\frac{|AB_1|}{|B_1C|} \cdot \frac{|CA_1|}{|A_1B|} \cdot \frac{|BC_1|}{|C_1A|} = 1. \quad (6.2)$$

Теорема 6.3 (Чевы I) Пусть дан треугольник ABC , а на каждой его стороне заданы точки $A_1 \in BC$, $B_1 \in AC$ и $C_1 \in AB$. Прямые (отрезки) AA_1 , BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда выполняется следующее соотношение (называемое **тройным соотношением**):

$$\frac{|AB_1|}{|B_1C|} \cdot \frac{|CA_1|}{|A_1B|} \cdot \frac{|BC_1|}{|C_1A|} = 1. \quad (6.3)$$

Теорема 6.4 (Чевы II) Пусть дан треугольник ABC , а на каждой прямой, содержащей его стороны, заданы точки $A_1 \in (BC)$, $B_1 \in (AC)$ и $C_1 \in (AB)$, причем одна из них лежит на стороне, две другие — на продолжениях сторон. Прямые (AA_1) , (BB_1) и (CC_1) параллельны или пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда выполняется следующее соотношение (называемое **тройным соотношением**):

$$\frac{|AB_1|}{|B_1C|} \cdot \frac{|CA_1|}{|A_1B|} \cdot \frac{|BC_1|}{|C_1A|} = 1. \quad (6.4)$$

7 Окружность.

Определение 7.1 Дуга $\overset{\frown}{ADC}$ называется **дополнительной к дуге $\overset{\frown}{ABC}$ (дополняющей дугу ABC до окружности)**, если объединение дуг $\overset{\frown}{ABC}$ и $\overset{\frown}{ADC}$ образует одну окружность.

Определение 7.2 Многоугольник называется **вписанным многоугольником**, если существует окружность, проходящая через все его вершины. А эта окружность называется **описанной окружностью** около данного многоугольника.

Замечание 7.1 В случае вписанного многоугольника говорят, что он вписан в окружность, а окружность описана около него.

Определение 7.3 Многоугольник называется **описанным многоугольником**, если существует окружность, касающаяся всех его сторон. А эта окружность называется **вписанной окружностью** в данный многоугольник.

Замечание 7.2 В случае описанного многоугольника говорят, что он описан около окружности, а окружность вписана в него.

8 «Замечательные точки» в треугольнике.

Теорема 8.1 (о пересечении медиан в треугольнике) В любом треугольнике все медианы пересекаются в одной точке, причем этой точкой они делятся в отношении $2 : 1$, считая от вершины.

Определение 8.1 Точка пересечения медиан треугольника называется **центром масс треугольника**.

Теорема 8.2 (о пересечении серединных перпендикуляров в треугольнике) В любом треугольнике все серединные перпендикуляры, проведенные к сторонам, пересекаются в одной точке.

Теорема 8.3 (о пересечении биссектрис в треугольнике) В любом треугольнике все биссектрисы пересекаются в одной точке.

Теорема 8.4 (о пересечении высот в треугольнике) В любом треугольнике все высоты или их продолжения пересекаются в одной точке.

Определение 8.2 Точка пересечения высот треугольника (или их продолжений) называется **ортоцентром** треугольника.

Определение 8.3 Треугольник, образованный основаниями высот заданного треугольника, называется **ортотреугольником** данного треугольника.

Теорема 8.5 (о пересечении внешних биссектрис в треугольнике) В любом треугольнике биссектриса любого угла треугольника проходит через точку пересечения внешних биссектрис остальных двух углов.

Теорема 8.6 (об описанной около треугольника окружности) У любого треугольника существует и единственна описанная окружность. Центр этой окружности лежит на точке пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника.

Следствие 8.1 Если у какого-либо многоугольника существует описанная окружность, то она единственна.

Теорема 8.7 (о вписанной в треугольник окружности) У любого треугольника существует и единственна вписанная окружность. Центр этой окружности лежит на точке пересечения биссектрис треугольника.

Определение 8.4 Окружность, касающаяся одной стороны треугольника и двух продолжений сторон, называется **внеписанной окружностью** данного треугольника.

Теорема 8.8 (о внеписанных окружностях) У любого треугольника существует ровно три внеписанных окружности (по одной на каждую сторону треугольника). Центры этих окружностей лежат на двух внешних биссектрисах к треугольнику и на одной внутренней биссектрисе.

Утверждение 8.1 (Точки Жергона) В любом треугольнике прямые, соединяющие вершины треугольника с точками касания противоположной стороны вписанной окружностью, пересекаются в одной точке. Рассмотрим одну из внеписанных окружностей треугольника, тогда прямые, соединяющие вершины треугольника с точками касания противоположной стороны (или продолжений) с этой внеписанной окружностью, также пересекаются в одной точке. Эти две точки называются **точками Жергона**.

Утверждение 8.2 (Точка Нагеля) В любом треугольнике прямые, соединяющие вершины треугольника с точками касания противоположной стороны внеписанной окружностью к этой стороне, пересекаются в одной точке. Эта точка называется **точкой Нагеля**.

Утверждение 8.3 (Отрезки касательных в треугольнике) Пусть $A' \in BC$, $B' \in AC$ и $C' \in AB$ — точки касания сторон треугольника ABC его вписанной окружностью. Пусть $a = |BC|$, $b = |AC|$, $c = |AB|$ — длины сторон и $p = \frac{a+b+c}{2}$ — полупериметр. Тогда длины отрезков касательных, проведенных из вершин треугольника, равны

$$AC' = AB' = p - a, \quad BA' = BC' = p - b, \quad CA' = CB' = p - c. \quad (8.1)$$

Утверждение 8.4 (Отрезки касательных в треугольнике) Пусть $A' \in BC$, $B' \in (AC)$ и $C' \in (AB)$ — точки касания сторон треугольника ABC или их продолжений внеписанной окружностью, касающейся стороны BC . Пусть $a = |BC|$, $b = |AC|$, $c = |AB|$ — длины сторон и $p = \frac{a+b+c}{2}$ — полупериметр. Тогда длины отрезков касательных, проведенных из вершин треугольника, равны

$$AC' = AB' = p, \quad BA' = BC' = p - c, \quad CA' = CB' = p - b. \quad (8.2)$$

Утверждение 8.5 (описанность и вписанность правильных многоугольников) У любого правильного многоугольника существуют и единственны вписанная и описанная окружности.

9 Система координат.

Определение 9.1 Пусть на плоскости под прямым углом пересекаются две прямые l_1, l_2 в точке O и на каждой из этих прямых выбраны такие точки $E_1 \in l_1, E_2 \in l_2$, что $|OE_1| = |OE_2| = 1$ и наименьший угол $\angle E_1OE_2$ от луча OE_1 к лучу OE_2 идет в направлении против часовой стрелки. Тогда говорят, что задана **декартова система координат**. Точка O называется **началом координат**. Прямые с выбранными точками $(l_1, E_1), (l_2, E_2)$ называются **осями координат**, причем луч (O, E_i) называется **положительной полуосью**, а дополнительный к нему (луч с началом в точке O и не содержащий точку E_i) — **отрицательной полуосью** ($i = 1, 2$). Принято называть ось (l_1, E_1) **осью абсцисс** (**осью OX** , **осью x**), а ось (l_2, E_2) — **осью ординат** (**осью OY** , **осью y**).

Определение 9.2 Пусть на плоскости задана декартова система координат (O, E_1, E_2) и M — произвольная точка плоскости. Тогда **координатами точки M** в системе координат (O, E_1, E_2) называется пара чисел $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, обладающая следующими свойствами. Пусть M_x и M_y — основания перпендикуляров, опущенных из точки M на оси координат OX и OY соответственно. Тогда $x = |OM_x|$, если M_x принадлежит положительной полуоси, и $x = -|OM_x|$, если отрицательной полуоси. Аналогично, $y = |OM_y|$, если M_y принадлежит положительной полуоси, и $y = -|OM_y|$, если отрицательной полуоси. Координата x называется **абсциссой точки M** , y — **ординатой точки M** .

Утверждение 9.1 Пусть на плоскости задана декартова система координат. Тогда для любой точки плоскости существует ровно одна пара действительных чисел, являющаяся её координатами. И, наоборот, для любой пары действительных чисел существует ровно одна точка плоскости, для которой данная пара будет являться её координатами.

Замечание 9.1 Из предыдущего утверждения следует, что между точками плоскости и парами действительных чисел существует взаимно-однозначное соответствие. В частности, это означает, что геометрические утверждения для точек плоскости будут выполнены для пар чисел, и наоборот. Чтобы показать, какой точке какие координаты соответствуют, обычно пишут $M(x, y)$ или $M \leftrightarrow (x, y)$.

Теорема 9.1 Пусть на плоскости задана декартова система координат и дан отрезок AB , концы которого имеют координаты $A(x_a, y_a)$ и $B(x_b, y_b)$. Тогда длина отрезка находится по формуле $|AB| = \sqrt{(x_a - x_b)^2 + (y_a - y_b)^2}$, а середина отрезка имеет координаты $(\frac{x_a + x_b}{2}, \frac{y_a + y_b}{2})$.

Определение 9.3 Пусть на плоскости задана декартова система координат. Тогда **уравнением фигуры F** называется такое уравнение $f(x, y) = 0$ относительно координат x и y , что координаты любой точки фигуры F являются его корнем, а любой корень задает точку фигуры F .

Теорема 9.2 Любая прямая может быть задана уравнением $Ax + By + C = 0$, где A и B — действительные числа не все равные нулю одновременно (т.е. $A^2 + B^2 \neq 0$). И наоборот, любое уравнение указанного вида с указанным условием задаёт некоторую прямую.

Утверждение 9.2 Пусть две прямые заданы уравнениями $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ соответственно. Эти прямые параллельны (в обобщённом смысле, т.е. либо параллельны, либо совпадают) тогда и только тогда, когда $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$, причём эти прямые совпадают тогда и только тогда, когда $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$.

Теорема 9.3 Пусть прямая l задана уравнением $Ax + By + C = 0$ и дана точка $P(x_0, y_0)$. Тогда расстояние от точки P до прямой (длина перпендикуляра, опущенного из точки P на прямую l) вычисляется по формуле

$$\rho(P, l) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \quad (9.1)$$

Теорема 9.4 В декартовой системе координат окружность с радиусом R и центром в точке с координатами (a, b) может быть задана уравнением $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$. И, наоборот, любое уравнение указанного вида задаёт окружность с радиусом R и центром в точке с координатами (a, b) .

10 Прямоугольный треугольник. Основы тригонометрии.

Предложение 10.1 (пропорциональные отрезки) Пусть a, b — катеты прямоугольного треугольника, c — его гипотенуза, a', b' — проекции катетов на гипотенузу, h — высота, опущенная на гипотенузу. Тогда выполняются следующие соотношения:

$$a' = \frac{a^2}{c}, \quad b' = \frac{b^2}{c}, \quad h = \sqrt{a'b'}. \quad (10.1)$$

Теорема 10.1 (Пифагора) Пусть a, b — катеты прямоугольного треугольника, c — его гипотенуза, тогда выполняется следующее соотношение:

$$c^2 = a^2 + b^2. \quad (10.2)$$

Лемма 10.1 (критерий прямоугольного треугольника) В прямоугольном треугольнике центр описанной окружности лежит на гипотенузе. И, наоборот, если в некотором треугольнике центр описанной окружности лежит на его стороне, то это треугольник прямоугольный.

Предложение 10.2 (радиусы окружностей) Пусть a, b — катеты прямоугольного треугольника, c — его гипотенуза, p — полупериметр, r — радиус вписанной окружности, R — радиус описанной окружности, r_a, r_b и r_c — радиусы вневписанных окружностей к соответствующим сторонам. Тогда выполняются следующие соотношения:

$$r = p - c, \quad R = \frac{c}{2}, \quad r_a = \frac{a}{2}, \quad r_b = \frac{b}{2}, \quad r_c = p. \quad (10.3)$$

Определение 10.1 Пусть на плоскости задана декартова система координат (O, E_1, E_2) и проведена окружность единичного радиуса с центром в начале координат $\omega = \omega(O, 1)$. Для каждого действительного числа $\varphi \in \mathbb{R}$ существует точка $M \in \omega$ такая, что $\varphi = \angle(OE_1, OM)$ (имеется в виду угол со знаком, то есть если угол от OE_1 до OM идет против часовой стрелки, то угол положительный, иначе — отрицательный; для $\varphi \notin (-\pi, \pi]$ полагаем $\angle(OE_1, OM) = (\varphi + \pi \bmod 2\pi) - \pi \in (-\pi, \pi]$). Пусть точка $M = M(\varphi)$ имеет координаты $(x, y) = (x(\varphi), y(\varphi))$. Тогда **синусом величины (угла) φ** называется ордината y (обозначается $\sin(\varphi)$, $\sin \varphi$), **косинусом величины (угла) φ** называется абсцисса x (обозначается $\cos(\varphi)$, $\cos \varphi$). Для $\varphi \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$, **тангенсом величины (угла) φ** называется отношение $\frac{y}{x}$ (обозначается $\operatorname{tg}(\varphi)$, $\operatorname{tg} \varphi$). Для $\varphi \neq \pi n, n \in \mathbb{Z}$, **котангенсом величины (угла) φ** называется отношение $\frac{x}{y}$ (обозначается $\operatorname{ctg}(\varphi)$, $\operatorname{ctg} \varphi$).

Определение 10.2 Функция $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ называется **периодической функцией с периодом** $T \in (0, +\infty)$, если $\forall x \in \mathbb{R} \ f(x + T) = f(x)$ (то есть через каждый отрезок действительной прямой длины T значения повторяются) и $\forall \tau \in (0, T) \ \exists y : f(y + T) \neq f(y)$ (а при меньшей длине такого отрезка уже найдется аргумент функции, при котором повторения не будет).

Лемма 10.2 Тригонометрические функции $\sin(\varphi)$ и $\cos(\varphi)$ периодичны с периодом 2π . Тригонометрические функции $\operatorname{tg}(x)$ и $\operatorname{ctg}(x)$ периодичны с периодом π .

Лемма 10.3 (Основное тригонометрическое тождество) Для любого $\varphi \in \mathbb{R}$ выполняется соотношение

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1. \quad (10.4)$$

Следствие 10.1 Для $\varphi \in \mathbb{R}$ выполняются соотношения

$$\operatorname{tg}^2 \varphi + 1 = \frac{1}{\cos^2 \varphi}, \varphi \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}, \quad \operatorname{ctg}^2 \varphi + 1 = \frac{1}{\sin^2 \varphi}, \varphi \neq \pi n, n \in \mathbb{Z}. \quad (10.5)$$

Лемма 10.4 Функция $\cos(\varphi)$ — четная, функции $\sin(\varphi)$, $\operatorname{tg}(\varphi)$ и $\operatorname{ctg}(\varphi)$ — нечетные, то есть

$$\begin{aligned} \cos(-\varphi) &= \cos(\varphi), & \sin(-\varphi) &= -\sin(\varphi), & \varphi \in \mathbb{R}, \\ \operatorname{tg}(-\varphi) &= -\operatorname{tg}(\varphi), & \varphi \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}, & & \operatorname{ctg}(-\varphi) = -\operatorname{ctg}(\varphi), & \varphi \neq \pi n, n \in \mathbb{Z}. \end{aligned} \quad (10.6)$$

Лемма 10.5 (Простейшие формулы приведения) Для любого $\varphi \in \mathbb{R}$ выполняются соотношения

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) &= \sin \varphi, & \sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) &= \cos \varphi, \\ \cos\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right) &= -\sin \varphi, & \sin\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right) &= \cos \varphi, \\ \cos(\pi - \varphi) &= -\cos \varphi, & \sin(\pi - \varphi) &= \sin \varphi, \\ \cos(\pi + \varphi) &= -\cos \varphi, & \sin(\pi + \varphi) &= -\sin \varphi. \end{aligned} \quad (10.7)$$

Теорема 10.2 Пусть a , b — катеты прямоугольного треугольника, c — его гипотенуза, α — угол, прилежащий к катету b . Тогда выполняются соотношения

$$\sin \alpha = \frac{a}{c}, \quad \cos \alpha = \frac{b}{c}, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}, \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{b}{a}. \quad (10.8)$$

Теорема 10.3 Пусть a , b — катеты прямоугольного треугольника, c — его гипотенуза, $\alpha = 30^\circ$ — угол, прилежащий к катету b . Тогда выполняется следующее соотношение $a = \frac{1}{2}c$.

Следствие 10.2 Для тригонометрических функций верна следующая таблица значений

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\operatorname{tg} \alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	—	0
$\operatorname{ctg} \alpha$	—	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	—

11 Вписанный и центральный угол.

Определение 11.1 Пусть дана на плоскости окружность ω и даны точки на ней $A, B, C, X \in \omega$, причем $X \notin \overset{\frown}{ABC}$. Тогда угол $\angle ABC$ называется **вписанным (в окружность ω) углом, опирающимся на дугу $\overset{\frown}{AXC}$ (дополнительную к дуге $\overset{\frown}{ABC}$)**, то есть это угол, образованный двумя хордами, исходящими из одной точки.

Определение 11.2 Пусть дана на плоскости окружность ω с центром в точке O и даны точки на ней $A, B, X \in \omega$. Тогда угол $\angle AOB$ называется **центральный углом (окружности ω)**, **опирающимся на дугу $\overset{\frown}{AXB}$** (точка X расположена внутри этого угла), то есть это угол, образованный двумя радиусами.

Замечание 11.1 Каждой дуге окружности соответствует (опирается на неё) ровно один центральный угол, при этом опирающихся на неё вписанных углов бесконечно много.

Определение 11.3 **Градусной мерой дуги** называется градусная мера центрального угла, опирающегося на эту дугу.

Теорема 11.1 (о вписанном и центральном угле, опирающихся на одну дугу)

Пусть вписанный угол $\angle ACB$ и центральный угол $\angle AOB$ опираются на одну дугу. Тогда $\angle ACB = \frac{1}{2}\angle AOB$ (то есть вписанный угол равен половине дуги, на которую он опирается).

Следствие 11.1 Вписанные углы, опирающиеся на одну дугу, равны

Замечание 11.2 Иногда вместо слов «вписанный угол, опирающийся на дугу» используют слова «вписанный угол, опирающийся на хорду». Такое вполне допустимо. Однако следует заметить, что вписанные углы, опирающиеся на одну хорду не обязательно опираются на одну дугу. Углы могут опираться на разные дуги, дополнительные друг к другу, так как они имеют общие концы. Поэтому формулировка последнего утверждения для углов, опирающихся на одну хорду, неверна! Поэтому использование данной терминологии крайне настоятельно не рекомендуется. Единственное исключение, где допустима вольность речи, когда вписанный угол «опирается на диаметр», так как в данном случае углы могут опираться на разные дуги, но они будут равны в силу того, что они являются полуокружностями.

Следствие 11.2 Величина вписанного угла, «опирающегося на диаметр» (опирающегося на полуокружность) равен 90° .

Теорема 11.2 (об угле между хордой и касательной) Пусть дана на плоскости окружность ω с центром в точке O , точки $A, B \in \omega$ и прямая (KA) — касательная к окружности, проведенная в точке A . Тогда $\angle KAB = \frac{1}{2}\angle AOB$ (угол между хордой и касательной, проведенной через один из концов хорды, равен половине градусной меры дуги, заключенной между сторонами этого угла).

Утверждение 11.1 (об угле между двумя прямыми пересекающими окружность) На плоскости дана окружность ω и две прямые, пересекающие эту окружность. Если эти две прямые пересекаются внутри окружности, то угол между ними φ равен $\frac{1}{2}(\alpha + \beta)$, где α и β — градусные меры дуг, отсекаемых данными прямыми и лежащих внутри вертикальных углов с величиной φ . Если эти две прямые пересекаются вне окружности, то угол между ними ψ равен $\frac{1}{2}|\alpha - \beta|$, где α и β — градусные меры дуг, отсекаемых данными прямыми и лежащих внутри угла с величиной ψ .

Утверждение 11.2 (Пропорциональные отрезки в круге) На плоскости дана окружность ω и две её хорды AC и BD . Пусть эти хорды (или их продолжения) пересекаются в точке X , тогда выполняется соотношение $|AX| \cdot |CX| = |BX| \cdot |DX|$.

Следствие 11.3 (равенство квадрата касательной произведению секущей на её внешнюю часть) Пусть на плоскости дана окружность ω , из точки M , находящейся вне окружности, проведены отрезок касательной MT и секущая MA (с внешней частью MB). Тогда выполняется соотношение $|MT|^2 = |MA| \cdot |MB|$.

12 Теоремы косинусов и синусов для треугольника.

Теорема 12.1 (Теорема косинусов для треугольника) Пусть a, b, c — длины сторон треугольника, а α — величина угла, противолежащего стороне c длиной a . Тогда для данного треугольника верно соотношение

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha. \quad (12.1)$$

Теорема 12.2 (Теорема синусов для треугольника) Пусть a, b, c — длины сторон треугольника, а α, β, γ — противолежащие им величины углов соответственно. Тогда для данного треугольника верно соотношение

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}. \quad (12.2)$$

Теорема 12.3 (Обобщенная теорема синусов для треугольника) Пусть a, b, c — длины сторон треугольника, α, β, γ — противолежащие им величины углов соответственно, а R — радиус описанной окружности. Тогда для данного треугольника верно соотношение

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R. \quad (12.3)$$

Теорема 12.4 Для любых $x, y \in \mathbb{R}$ верно равенство $\cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$.

Следствие 12.1 Для любых $x, y \in \mathbb{R}$ верны равенства:

$$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y, \quad (12.4)$$

$$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \sin y \cos x, \quad (12.5)$$

$$\sin(x - y) = \sin x \cos y - \sin y \cos x, \quad (12.6)$$

$$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x = 2 \cos^2 x - 1 = 1 - 2 \sin^2 x, \quad (12.7)$$

$$\sin(2x) = 2 \sin x \cos x. \quad (12.8)$$

13 Вписанный и описанный четырехугольники.

Теорема 13.1 (Критерий вписанного четырехугольника) Четырехугольник является вписанным тогда и только тогда, когда сумма его противоположных углов равна 180° .

Замечание 13.1 Из формулы суммы углов четырехугольника видно, что условие предыдущего критерия эквивалентно следующему: суммы величин противоположных углов четырехугольника равны между собой.

Теорема 13.2 (Критерий описанного выпуклого четырехугольника) Четырехугольник является описанным тогда и только тогда, когда суммы длин его противоположных сторон равны между собой.

Определение 13.1 Пусть в плоскости дан отрезок XU и дана точка M , которая не лежит на прямой (XU) . Если угол $\angle XMU = \alpha$, то говорят, что из точки M отрезок XU под углом α .

Теорема 13.3 (ГМТ, из которых данный отрезок виден под данным углом) Пусть в плоскости дан отрезок XU и задан угол $\alpha \in (0, \pi)$. Тогда геометрическое место точек (множество точек) таких, что из них отрезок XU виден под углом α , состоит из двух дуг окружностей, симметричных относительно прямой (XU) , для которых XU — хорда, соединяющая концы дуг, и их градусная мера равна $2\pi - 2\alpha$.

14 Степень точки относительно окружности.

15 Преобразования плоскости.

16 Геометрические построения.

17 Дополнительные задачи.